Intégration de deux équations aux différences finies linéaires à deux variables.

Par DANIEL ARANY à Budapest.

Dédié à M. Louis Bachelier.

Premier Problème.

Envisageons l'équation suivante

$$(1) \qquad y(x, t) = p\,y(x-1, t+1) + q\,y(x-1, t-1)$$

aux conditions limites:

$y(x, 0) = 0$, $y(x, n) = 0$, $y(x, x) = q^x$ et $y(x, t) = 0$ si $x < t$.

Soit en outre $p + q = 1$.

Considérons la solution particulière suivante

$$(2) \qquad y(x, t) = \alpha^x \beta^t.$$

De (1) on tire

$$(3) \qquad \alpha^x \beta^t = p\,\alpha^{x-1} \beta^{t+1} + q\,\alpha^{x-1} \beta^{t-1}$$

et en simplifiant

$$(4) \qquad \beta^2 - \frac{\alpha}{p}\beta + \frac{q}{p} = 0.$$

Désignons les racines de l'équation (4) par β_1 et β_1. En multipliant cette équation successivement par $\beta, \beta^2, \ldots, \beta^{t-2}$ on obtient $t-2$ équations de la forme

$$(5) \qquad \beta^t = \beta\,u(t) + u_1(t)$$

où $u(t)$ et $u_1(t)$ sont des fonctions de α, p et q.

L'équation (5) subsiste pour β_1 et β_2. On a donc

$$\beta_1^t = \beta_1 u(t) + u_1(t) \quad \text{et} \quad \beta_2^t = \beta_2 u(t) + u_1(t)$$

il en résulte

$$u(t)=\frac{\beta_1^t-\beta_2^t}{\beta_1-\beta_2} \tag{6}$$

$$u_1(t)=-\frac{q}{p}\,u(t-1)\,;$$

on a évidemment

$$u(0)=0 \quad \text{et} \quad u(1)=1.$$

De l'équation (4) on obtient

$$\beta=\frac{1}{2p}(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4pq})$$

ce qui donne, en posant

$$\alpha=2\sqrt{pq}\,\cos\vartheta, \tag{7}$$

$$\beta_1=\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(\cos\vartheta+i\sin\vartheta) \quad \text{et} \quad \beta_2=\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}(\cos\vartheta-i\sin\vartheta), \tag{8}$$

de plus

$$\beta_1^t=\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{t}{2}}(\cos t\vartheta+i\sin t\vartheta) \quad \text{et} \quad \beta_2^t=\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{t}{2}}(\cos t\vartheta-i\sin t\vartheta)$$

et enfin il vient de (6)

$$u(t)=\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{t-1}{2}}\frac{\sin t\vartheta}{\sin\vartheta}. \tag{9}$$

En multipliant l'équation (5) par α^x on trouve

$$y(x,t)=u(t)\,y(x,1)+u_1(t)\,y(x,0)\,;$$

comme $y(x,0)=0$, on a

$$y(x,t)=u(t)\,y(x,1)$$

Comme on doit avoir en outre $y(x,n)=0$, on a en vertu de (9)

$$\frac{\sin\vartheta n}{\sin\vartheta}=0\,; \tag{10}$$

ϑ ne peut donc avoir que les valeurs $k\pi/n$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$. On obtient donc la solution suivante de l'équation (1) satisfaisant à $y(x,0)=0$ et $y(x,n)=0$:

$$y(x,t)=\sum_{k=1}^{n-1} C_k \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{t-1}{2}} \frac{\sin\frac{k\pi t}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}}\, y(x,1).$$

Remplaçons $y(x,1)$ par sa solution particulière suivante

$$y(x,1)=\alpha^x(\beta_1+\beta_2)=\left(2\sqrt{pq}\,\cos\frac{k\pi}{n}\right)^x 2\cos\frac{k\pi}{n}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui donne

$$y(x,t)=\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{t}{2}}(qp)^{\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n-1} C_k \frac{\sin\frac{k\pi t}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}}\left(2\cos\frac{k\pi}{n}\right)^{x+1}.$$

Pour $x=1$ et $t=1$ on doit avoir $y(1,1)=q$. Il en résulte

$$\frac{1}{4}=\sum_{k=1}^{n-1} C_k \cos^2\frac{k\pi}{n}.$$

De plus pour $x=1$ et $t=2,3,4,\ldots,n-1$ on doit avoir $y(1,t)=0$, par suite

$$0=\sum_{k=1}^{n-1} C_k \cos^2\frac{k\pi}{n}\,\frac{\sin\frac{k\pi t}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}}.$$

Posons

$$A_k=C_k\frac{\cos^2\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}}.$$

Alors les équations à satisfaire seront:

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k \sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{4},$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k \sin\frac{\pi k t}{n}=0$$

pour $t=2,3,\ldots,n-1$. On démontre au Calcul des Différences Finies que ces équations sont satisfaites si

$$A_k=\frac{1}{2n}\sin\frac{k\pi}{n},$$

pourvu que l'on ait $n>2$.[1]) On en conclut que

[1]) Voir p. e. Ch. Jordan, *Calculus of Finite Differences* (Budapest, 1939), p. 127.

$$C_k = \frac{1}{2n} \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n}}{\cos^2 \frac{k\pi}{n}}$$

et finalement on a

$$(11) \qquad y(x,t) = \frac{2^x}{n} q^{\frac{t+x}{2}} p^{\frac{x-t}{2}} \sum_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} \sin\frac{k\pi t}{n} \left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)^{x-1}.$$

Comme cette valeur a été obtenue à l'aide de

$$y(1,1) = q \quad \text{et} \quad y(1,t) = 0 \quad \text{si} \quad t > 1$$

il reste encore à vérifier que l'on a aussi

$$y(x,x) = q^x \quad \text{et} \quad y(x,t) = 0 \quad \text{si} \quad t > x.$$

On a en exprimant les puissances des cosinus par les cosinus des multiples de l'angle

$$2^{x-2} (\cos\vartheta)^{x-1} = \sum_{j=0} \binom{x-1}{j} \cos(x-1-2j)\vartheta,$$

puis on a

$$\cos(x-1-2j)\vartheta \,.\, \sin\vartheta = \frac{1}{2}[\sin(x-2j)\vartheta + \sin(x-2j-2)\vartheta].$$

Il en résulte, que dans l'expression (11) le coefficient le plus élévé de ϑ sera x; de plus pour $t = x$ la somme de tous les autres termes sera nulle à cause de

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin\frac{xk\pi}{n} \sin\frac{\nu k\pi}{n} = 0 \quad \text{si} \quad x \neq \nu$$

et l'on aura

$$y(x,x) = \frac{2}{n} q^x \sum_{k=1}^{n-1} \sin^2 \frac{xk\pi}{n} = q^x.$$

Lorsque $t > x$, tous les termes seront nuls pour la même raison[2]).

Second Problème.

Cherchons l'intégrale de l'équation

$$z(x,t) = p\, z(x-1, t+1) + q\, z(x-1, t-1)$$

identique à (1); mais aux conditions limites suivantes:

$$z(x,0) = 0, \; z(x,n) = 0, \; z(1, \alpha-1) = p, \; z(1, \alpha+1) = q$$
$$(1 < \alpha < n-1).$$

[2]) La démonstration a été considérablement abrégée grâce à une remarque de M. Charles Jordan.

Dans ce cas on a

$$(12)\quad z(x,t)=\frac{2^{x+1}}{n}\,p^{\frac{1}{2}(x-t+\alpha)}\,q^{\frac{1}{2}(x+t-\alpha)}\sum_{\lambda=1}^{n-1}\sin\left(\alpha\frac{\lambda\pi}{n}\right)\sin\left(t\frac{\lambda\pi}{n}\right)\cos^{x}\left(\frac{\lambda\pi}{n}\right).$$

En comparant ce résultat à (11) on trouve que

$$y(x,t)=q[z(x-1,t)]_{\alpha=1}.$$

Applications des deux résultats trouvés.

La quantité $y(x, t)$ représente la probabilité de la perte de t francs en x parties, d'un joueur A, possédant t francs, qui joue contre un joueur B, possédant $n-t$ francs, p étant la chance de gagner du joueur A à chaque partie et q celle du joueur B.

La quantité $z(x, t)$ représente la probabilité de la perte de $t-\alpha$ francs en x parties, d'un joueur A, possédant t francs au commencement du jeu, qui joue contre un joueur B, possédant $n-t$ francs au commencement du jeu. Les chances de gagner à chaque partie sont pour les deux joueurs les mêmes que dans le cas précédent.

Robert L. Ellis, qui a établi le premier la formule (12) dans un Mémoire intitulé: "On the solution of equations of finite differences" (*The Mathematical and other writings of R. Leslie Ellis,* Cambridge and London, 1863) remarque au p. 210: "One point, which is worth perhaps notice, is the *symmetrical* manner in which α and t, and p and q enter into $z(x, t)$; the result, however, which is the interpretation of this symmetry may probably be obtained by general consideration."

Dans un mémoire[3]) paru en 1933 j'ai traité "Le problème des parcours" que j'ai formulé ainsi: "Le problème des parcours consiste dans la recherche de la probabilité, d'arriver du point 0 à un point x en n pas, en touchant le point x *au moins une fois* et ne touchant *jamais* certains points que j'ai nommé points extrémaux". (La probabilité de passer d'un point à *l'un* des points voisins soit $p=q=\frac{1}{2}$.)

[3]) D. Arany, Le problème des parcours, *Tôhoku Math. Journ.*, 37 (1933), p. 17—22.

Dans un second Mémoire[4]) paru la même année (1933) j'ai établi une formule qui définit la probabilité de passer d'un point x au point y en n pas, sous les mêmes conditions qui sont valables pour le passage de 0 à x. Si j'applique cette formule, qui coïncide (aux notations près) avec la formule (12) du mémoire précédent, la symétrie de α et t est expliquée, puisque la probabilité de passer α à t, ou celle de passer de t à α est la même.

Budapest, le 27 Janvier 1939.

(Reçu le 4 novembre 1939)

---

[4]) D. Arany, Le problème de parcours, *Association Française pour l'Avancement des Sciences, Compte Rendu de le* 57[e] *Session* (Chambéry, 1933), p. 20—23.